

COURS DE MATHÉMATIQUES

29

ENTRAÎNEMENT AU CALCUL

LYCÉE LA BRUYÈRE
30 AVENUE DE PARIS
78000 VERSAILLES

28.1 Mode d'emploi de ce document

28.2 Révision des fondamentaux.

28.2.1 Logique

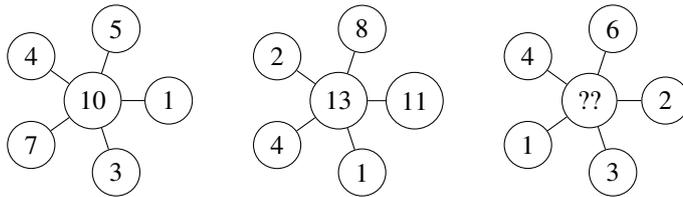
■ Compléter les séries suivantes

- | | |
|---|--|
| (a) $32 - 16 - 48 - 24 - 72 - \dots - \dots$ | (f) $5 - 10 - 13 - \dots - 29 - 58$ |
| (b) $691 - 695 - \dots - 698 - 697 - 701 - 700$ | (g) $D - E - G - J - N - S - \dots$ |
| (c) $D - F - H - J - L - N - \dots$ | (h) $A - F - D - I - G - L - \dots$ |
| (d) $C - F - \dots - \dots - K - N - O$ | (i) $1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - \dots - \dots$ |
| (e) $7 - 5 - 7 - 7 - 7 - 9 - 8 - 1 - 8 - 3 - \dots - \dots - \dots$ | (j) $2 - 2 - 4 - 12 - 12 - 24 - 72 - 72 - \dots - \dots$ |

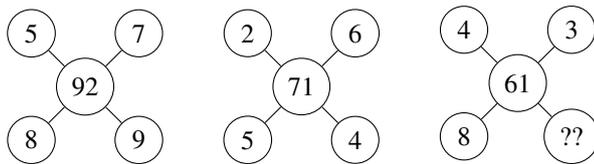
■ Trouver l'intrus

- | | |
|---|--|
| (a) tennis-billard-pétanque-polo-ski | (f) $25 - 86 - 34 - 18 - 92$ |
| (b) cuivre-fer-étain-bronze-aluminium | (g) $32 - 87 - 46 - 21 - 54$ |
| (c) procédure-requête-huissier-procès-assignation | (h) $43 - 17 - 89 - 63 - 56$ |
| (d) violon-flûte-orgue-cornemuse-accordéon | (i) radis-carotte-navet-oignon-betterave |
| (e) sénateur-député-candidat-parlementaire-élu | (j) $145 - 369 - 189 - 283 - 437$ |

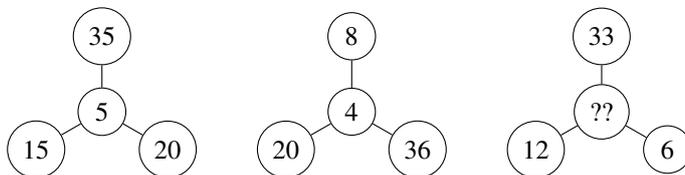
■ Compléter la série



■ Compléter la série



■ Compléter la série



28.2.2 Proportionnalité

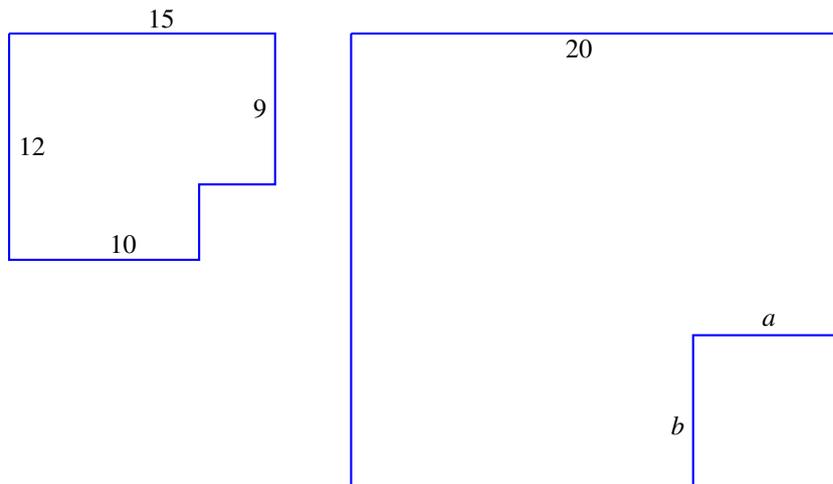
■ Le côté d'un carré est réduit de 10%. Exprimez en pourcentage :

- (a) la réduction de son périmètre
 (b) la réduction de son aire

■ Le côté d'un cube est réduit de 10%. Exprimez en pourcentage :

- (a) la réduction de sa surface
 (b) la réduction de son volume

■ *La deuxième figure est obtenue par agrandissement proportionnel de la première. Trouver a et b .*



28.2.3 Nombres réels et inégalités

■ *Calculer très rapidement*

- | | |
|---------------------------------------|---------------------|
| (a) $(48 \times 19) - (48 \times 9)$ | (f) 31×103 |
| (b) $(72 \times 57) - (72 \times 37)$ | (g) 25×99 |
| (c) $(57 \times 64) + (57 \times 36)$ | (h) 75×98 |
| (d) $(48 \times 87) + (48 \times 13)$ | (i) 61×97 |
| (e) $(94 \times 73) + (94 \times 27)$ | (j) 55×102 |

■ *Calculer très rapidement*

- | | |
|---|--|
| (a) $(2,5 \times 6,7) + (2,5 \times 3,3)$ | (f) $(9 \times (4 + \frac{2}{3})) + (9 \times (5 + \frac{1}{3}))$ |
| (b) $(5,2 \times 5,6) + (5,2 \times 4,4)$ | (g) $(12 \times (3 + \frac{3}{4})) + (12 \times (6 + \frac{1}{4}))$ |
| (c) $(0,54 \times 80,5) + (0,54 \times 19,5)$ | (h) $(11 \times (90 + \frac{6}{5})) - (11 \times (9 - \frac{1}{5}))$ |
| (d) $(8,6 \times 71,9) + (8,6 \times 28,1)$ | (i) $(6 \times (97 + \frac{7}{4})) + (6 \times (1 + \frac{1}{4}))$ |
| (e) $(1,63 \times 51,5) + (1,63 \times 48,5)$ | (j) $(8 \times (2 + \frac{5}{3})) + (8 \times (4 + \frac{7}{3}))$ |

■ *Calculer très rapidement*

- | | |
|-------------------|---------------------|
| (a) $12^2 - 2^2$ | (f) $7,9^2 - 2,1^2$ |
| (b) $60^2 - 40^2$ | (g) $6,7^2 - 3,3^2$ |
| (c) $77^2 - 23^2$ | (h) $5,1^2 - 4,9^2$ |
| (d) $92^2 - 8^2$ | (i) $5,8^2 - 4,2^2$ |
| (e) $82^2 - 18^2$ | (j) $9,4^2 - 0,6^2$ |

■ *Calculs élémentaires*

(a) $\frac{8}{6} - \frac{9}{4}$

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(c) $(-1) - (-2) + 3 - (-1)$

(d) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$

(e) $\frac{3}{7} \times \left(\frac{11}{3} - \frac{16}{5}\right) - \left(\frac{3}{7} - \frac{11}{3}\right) \times \frac{16}{5}$

(f) $\frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}$

(g) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

(h) $\frac{\sqrt{20} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{8}\sqrt{10} - 5}$

(i) $\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2$

(j) $\left(1 + \sqrt{\frac{31}{3}}\right)^3 + \left(1 - \sqrt{\frac{31}{3}}\right)^3$

■ *Simplifiez les expressions suivantes sous la forme $x + y\sqrt{3}$ où x et y sont des rationnels*

$$a = 2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}; \quad b = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}; \quad c = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}}}$$

■ *Simplifier les sommes suivantes*

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 297 + 298 + 299$

(b) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 177 + 179$

(c) $6 + 7 + 8 + \dots + 156 + 157$

(d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$

(e) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{729} - \frac{1}{287}$

(f) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 297 - 298 + 299$

(g) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 17^2 + 18^2$

(h) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$

(i) $2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{17}$

(j) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 46$

■ *Simplifiez les expressions suivantes*

(a) $(a - 3)(b + c) - (ac + 2b)$

(b) $(b^2 - a^2) - a(2b^2 - a)$

(c) $a^2c + (a - b)(b - c)(a + b)$

(d) $(3a + 2)^2 - (4a + b)(2a - 1)$

(e) $-3 + a(1 + a(2 + b(-1 + a)))$

(f) $(a - b)(a - 2c) + (b - c)(a - 2)$

(g) $c(1 - a)(1 - b) + b(1 - a)(1 - c) + b(1 - a)(1 - c)$

(h) $(a - b + c)^2 - (-a - b + c)^2 + (a + b + c)^2$

(i) $(ab + ac + bc)(a + b + c) - (a^2 + b^2 + c^2)(b - c)$

(j) $a - ((a - (a - b)^2)^2)^2$

■ *Développez les expressions suivantes*

(a) $(a - b)^3$

(b) $(a + b)^2 + (a - b)^2$

(c) $((a + b)^2)^2$

(d) $(b + c)^4$

(e) $(a - b\sqrt{2})^2(a + b\sqrt{2})^2$

(f) $(3a + b^2 + c)^2$

(g) $(a + \frac{1}{a})^2$

(h) $(a - \frac{1}{a})^3$

(i) $(a + \frac{1}{a})^4$

(j) $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})^4$

■ *Résoudre les équations suivantes*

(a) $2(3x - 7) - (4x - 10) = 0$

(b) $3(3 + 2x) + (2x - 1) = 8$

(c) $(2x + 1)^2 + (9 - 4x^2) + (x - 5) = 10$

(d) $8(x + 1)^2 - 8x + 10 = 0$

(e) $(x^2 - 9) + (2x - 6)(x + 7) = 0$

■ **Factoriser les expressions suivantes**

(a) $(2x - 1)(x + 3) - (2 - 4x)(1 - x)$

(b) $(x - 2)(x + \frac{3}{2}) + (2x + 3)(x^2 - 4x + 4)$

(c) $x^2 + 5x + 6$

(d) $x^2 - 5x + 6$

(e) $x^2 - 5x - 6$

(f) $(3x - 1)^2 - (x + 5)^2$

(g) $-5x^2 + 15x - 10$

(h) $4x^2 - 9$

(i) $x^2 + 6x - 7$

(j) $x^3 - 2x^2 + 2(4 - x^2)$

■ **Factorisations (suite)**

(a) développez $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(b) factorisez $x^3 - 1$ et $x^3 + 1$

(c) factorisez $x^3 + x^2 - 2x$

(d) factorisez $x^4 - 2x^2 + 1$

■ **Résoudre les équations suivantes**

(a) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

(b) $4x^2 - 18x + 20 = 0$

(c) $-x^2 + 5x + 0.3 = 0$

(d) $5x^2 + 2x - 1 = 0$

(e) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(f) $x^2 + 4 = 3x^2 - x$

(g) $2x + x^2 = 9 + x^2$

(h) $(5 - x)(2 - x) = 1$

(i) $2x^2 - 2\sqrt{7}x + \frac{7}{2} = 0$

(j) $x^2 + 9x = 0$

■ **Rangez les nombres suivants dans l'ordre croissant**

$$-\frac{5}{3}; -\sqrt{2}; -\frac{7}{5}; \frac{22}{7}; 0; \frac{9}{5}; -\sqrt{3}$$

■ **Rangez les nombres suivants dans l'ordre croissant**

$$-\sqrt{90}; 8; -\frac{81}{8}; \frac{81}{10}; \sqrt{90}; 9$$

■ **Simplifiez les inégalités suivantes**

(a) $(a - b) + c > 2c - b$

(b) $(a + c^2) + c(a - c) \geq ac + 1$

(c) $ab - (a - 2b)b < b^2 + c$

(d) $2(a + ac) - 4ac > 2a - c$

(e) $b(b + 2) > (b + 1)(b + 2)$

(f) $(a - b)^2 > 3 - 2ab + a^2$

■ **Résoudre les inéquations suivantes**

(a) $4x - 13 < 3$

(b) $2(7 - x) \geq x + 1$

(c) $5(x - 3) - 2x + 6 > 0$

(d) $2(x^2 - x) > 0$

(e) $3x^2 + 2x - 1 \geq 0$

(f) $x^2 - 5x + 6 < 0$

(g) $x^2 - 7x \leq -6$

(h) $(5 - x)(2 - x) < 1$

(i) $2x^2 - 3 > x^2 + 6$

(j) $x^2 + 9x > 0$

■ **Mettre les expressions suivantes sous la forme d'un (seul) quotient**

(a) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x + 2}$

$$(b) \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+2}$$

$$(c) \frac{\frac{x-y}{y} - \frac{x+y}{x}}{x-y + \frac{x+y}{x}}$$

$$(d) \frac{2x-3}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$(e) \frac{1}{x - \frac{1}{3 + \frac{x-2}{5-x}}}$$

■ On pose $y = x - \frac{1}{x}$. Exprimer au moyen de y seulement, les expressions suivantes

$$a = x^2 + \frac{1}{x^2}; \quad b = x^3 - \frac{1}{x^3}; \quad c = x^4 + \frac{1}{x^4};$$

28.2.4 Valeur absolue et intervalles

■ Donnez l'ensemble solution des inéquations suivantes sous forme d'intervalle ou d'union d'intervalles

$$(a) x + 4 > 7$$

$$(b) 2x + 5 \leq -x + 1$$

$$(c) 5 - x > 4 - 2x$$

$$(d) x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$(e) \frac{x}{x-2} - 2 \geq \frac{-x+3}{x+1}$$

$$(f) \frac{2x-3}{x+5} < 0$$

$$(g) \frac{2x+3}{x^2-5x+6} \geq 0$$

$$(h) (3x+1)(2x-5) > (4x-10)(1+x)$$

$$(i) 3 + x^2 > -x^2 + 2$$

$$(j) \frac{x^3-8}{x^2-4} > -2$$

■ Résoudre les équations suivantes

$$(a) |x+4| = 7$$

$$(b) |2x-3| = 1$$

$$(c) |x^2-4| = 5$$

$$(d) |x^2-5x| = 6$$

$$(e) |-2x+5| = 7$$

$$(f) \left| \frac{2x-3}{x+5} \right| = 3$$

$$(g) 3|2-x| + 2|5-x| = 7$$

$$(h) |(3x+1)(2x-5)| = 4$$

$$(i) |3+x^3| = |-x^3+2|$$

$$(j) \left| \frac{x^3+8}{x^2-9} \right| = 2$$

■ Résoudre les inéquations suivantes en donnant l'ensemble solution sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles

$$(a) |x+4| < 7$$

$$(b) |2x-3| \leq 1$$

$$(c) |x^2-4| > 3$$

$$(d) |x^2-5x| \leq 6$$

$$(e) |-2x+5| > 7$$

$$(f) \left| \frac{2x-3}{x+5} \right| > 1$$

$$(g) \frac{|2x+3|}{|x^2-5x+6|} < 1$$

$$(h) |(3x+1)(2x-5)| > 2$$

$$(i) |3+x^3| < |-x^3+2|$$

$$(j) 3 - \left| \frac{x^3+8}{x^2-9} \right| < 2$$

■ Résoudre les équations et inéquations suivantes

- (a) $x^2 - |x| - 2 = 0$ (f) $x^2 - |x| - 12 < 0$
 (b) $2x^2 - |5x - 2| = 0$ (g) $x^2 + 2|x| - 15 \geq 0$
 (c) $|x^2 - x + 5| = x^2 - x - 5$ (h) $|x^2 - 6| > 4x + 1$
 (d) $|x^2 - 1| = x + 3$ (i) $|x - 3| > |x^2 - 9|$
 (e) $|x^2 + x| = x^2 + x$ (j) $x^2 \leq |x - 2|$

■ **Réécrire les inéquations suivantes à l'aide de la valeur absolue**

- (a) $-1 < x < 5$ (f) $-1 > x$ ou $x > 3$
 (b) $-7 < 1 - 2x < 3$ (g) $1 \leq (2x + 3)^2 \leq 16$
 (c) $1 \leq x^3 + 2 \leq 10$ (h) $x + \frac{1}{x} < 4$
 (d) $(x - 3)(x + 5) \leq 0$
 (e) $x - 1 < (x - 1)^2$

28.2.5 Exposants

■ **Simplifiez les expressions suivantes**

- (a) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$ (f) $(3 \times 2)^{2 \times 3} + 3^2 \times 2^3$
 (b) $\frac{(4 \times 3)^{10} + 4^9}{8^4}$ (g) $(3^2 + 2^3) \times (3^3 + 2^2)$
 (c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ (h) $\frac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^2}$
 (d) $5^3 \times 3^2 - 3^2$ (i) $10 \times (3^{-3} + 3^{-2} + 3^{-1})$
 (e) $10^{2+3} - 10^2 - 10^3$ (j) $(\sqrt{2^3 \times 9})^{-1} \times \sqrt{\frac{81 \times 2^5}{100}}$

■ **Exprimer les nombres suivants sous la forme $m \times 10^n$ où m et n sont des entiers relatifs (avec m non multiple de 10)**

- (a) $\frac{0,02}{200000}$
 (b) $0,04 \times 0,005 \times 60$
 (c) $\frac{3000 \times 0,1}{0,006}$
 (d) $\frac{1,5 \times 10^{-6} \times 400}{0,3 \times 0,001}$
 (e) $0,2 \times 10^{-3} \times 0,05 \times 10^5$

28.2.6 Polynômes

■ **Déterminer dans chacun des cas suivants les réels a et b sachant que**

- (a) $x^3 - 5x^2 + 7x - a$ se factorise par $x - 2$
 (b) $2x^3 + ax^2 - 5x - 1$ se factorise par $2x + 1$
 (c) $3x^3 + ax^2 + bx - 2$ se factorise par $(x + 2)(3x + 1)$
 (d) $ax^3 + 3x^2 + bx - 3$ se factorise par $(x - 1)(2x + 3)$

■ **Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes après avoir factorisé l'expression**

- (a) $x^3 - 1 + x^2 - 1 = 0$
 (b) $x^3 + 8 + x^2 - 4 = 0$
 (c) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

- (d) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
 (e) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

■ Déterminer des racines évidentes aux équations suivantes, puis les résoudre dans \mathbb{R}

- (a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
 (b) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$
 (c) $x^3 + x^2 - 3 = 0$
 (d) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$
 (e) $2x^3 + x^2 + 5x - 3 = 0$

28.2.7 Systèmes linéaires

■ Résoudre dans \mathbb{R}^2 , lorsque c'est possible, les systèmes linéaires 2×2 suivants

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} -x + y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} -x + y = -1 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3} + 1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \quad (S_6) \begin{cases} (\sqrt{6} - 2)x + (\sqrt{7} - \sqrt{5})y = 1 \\ (\sqrt{7} + \sqrt{5})x + (\sqrt{6} + 2)y = 0 \end{cases}$$

■ Résoudre, dans \mathbb{R}^3 , les systèmes linéaires 3×3 suivants

$$(S_6) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ 5x - y + 2z = -1 \end{cases} \quad (S_7) \begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

■ Déterminer le ou les polynômes de degré au plus 2 vérifiant

- (a) $P(-1) = 1$, $P(0) = 0$, $P(1) = -1$
 (b) $P(0) = 3$, $P'(0) = 1$ et $P''(0) = 2$
 (c) $P(-2) = 1$, $P(1) = 1$ et $P(3) = 1$
 (d) $P''(x) + P'(x) + P(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
 (e) $P(1) = P'(1) = 1$ et $P''(1) = 2$

■ Résoudre, dans \mathbb{R}^2 , les systèmes 2×2 suivants

$$(S_8) \begin{cases} \frac{3x - y}{x + y} = \frac{5}{3} \\ \frac{2x - y}{y - x} = -3 \end{cases} \quad (S_9) \begin{cases} x^2 + 5y^2 = 1 \\ 2x^2 + 11y^2 = 3 \end{cases}$$

■ Résoudre dans \mathbb{R}^3 les systèmes 3×3 suivants

$$(S_{10}) \begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases} \quad (S_{11}) \begin{cases} x(x + y + z) = 1 \\ y(x + y + z) = 3 \\ z(x + y + z) = 5 \end{cases}$$

28.2.8 Dans le plan

■ *Calculez la distance séparant les points A et B dans chacun des cas suivants*

- (a) $A = (-3, 9)$; $B = (-2, 8)$
- (b) $A = (43721, 56841)$; $B = (43711, 56830)$
- (c) $A = (a, 2)$; $B = (2a + 3, 6)$
- (d) $A = (a, b)$; $B = (b, -a)$
- (e) $A = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{7})$; $B = (\frac{3}{8}, -\frac{9}{4})$

■ *Calculez la pente de la droite passant par les points A et B dans chacun des cas suivants*

- (a) $A = (1, 3)$; $B = (2, 6)$
- (b) $A = (-1, 6)$; $B = (2, -4)$
- (c) $A = (1, +\sqrt{2})$; $B = (\sqrt{2}, 1)$
- (d) $A = (\frac{3}{4}, -\frac{5}{6})$; $B = (\frac{7}{9}, \frac{1}{7})$
- (e) $A = (x^2, \frac{1}{x})$; $B = (1, x)$

■ *Représenter graphiquement les courbes d'équation*

- (a) $y = -x$
- (b) $y = 1 + 2x$
- (c) $y = -\frac{2}{3}x + 3$
- (d) $x = 2y - 3$
- (e) $2x = 5y$

■ *Déterminez une équation de la droite passant par les points A et B dans chacun des cas suivants*

- (a) $A = (-3, 9)$; $B = (-2, 8)$
- (b) $A = (a, 2)$; $B = (2a + 3, 6)$
- (c) $A = (a, b)$; $B = (b, -a)$
- (d) $A = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{7})$; $B = (\frac{3}{8}, -\frac{9}{4})$

■ *Déterminez une équation de la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur \vec{u} dans chacun des cas suivants*

- (a) $A = (-3, 9)$; $\vec{u} = (-1, 7)$
- (b) $A = (a, 2)$; $\vec{u} = (a + 3, 6)$
- (c) $A = (a, b)$; $\vec{u} = (b, -a)$
- (d) $A = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{7})$; $\vec{u} = (\frac{3}{5}, -\frac{1}{4})$

■ *Dans chacun des cas suivants, donnez un point et un vecteur directeur de la droite d'équation :*

- (a) $y = 4x - 3$
- (b) $5x + 8y = 3$
- (c) $x = 5$
- (d) $x = 7y - 1$
- (e) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$

■ Déterminer les coordonnées du point B pour que P soit le milieu du segment $[AB]$

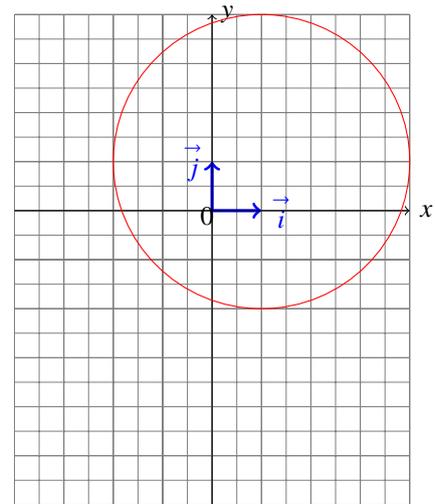
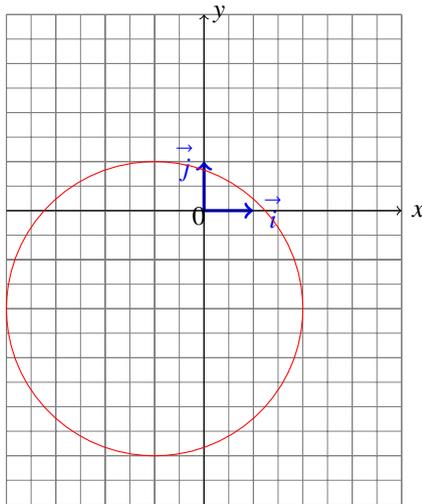
- (a) $A = (-1, 0)$, $P = (0, 2)$
 (b) $A = (2, -1)$, $P = (-1, 1)$
 (c) $A = (0, -2)$, $P = (-3, 0)$
 (d) $A = (-\frac{3}{4}, \frac{7}{3})$, $P = (\frac{2}{3}, -\frac{7}{6})$
 (e) $A = (\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$, $P = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

28.2.9 Cercles et paraboles

■ Déterminez une équation du cercle de centre A et de rayon r dans chacun des cas suivants :

- (a) $A = (1, 3)$; $r = \sqrt{2}$
 (b) $A = (-1, 6)$; $r = 3$
 (c) $A = (1, +\sqrt{2})$; $r = 1$
 (d) $A = (\frac{3}{4}, -\frac{5}{6})$; $r = \frac{1}{2}$

■ Déterminez une équation du cercle tracé dans chacun des cas suivants :



■ Déterminez, dans chacun des cas suivants, le centre et le rayon du cercle d'équation :

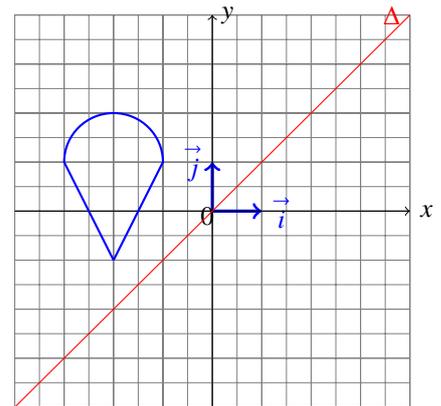
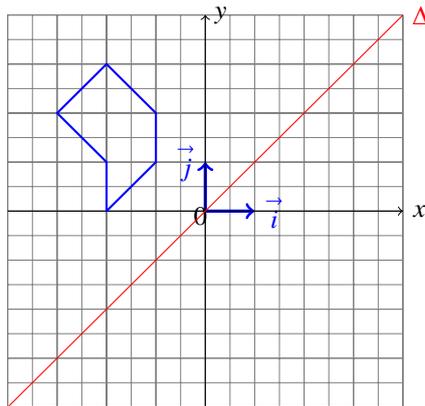
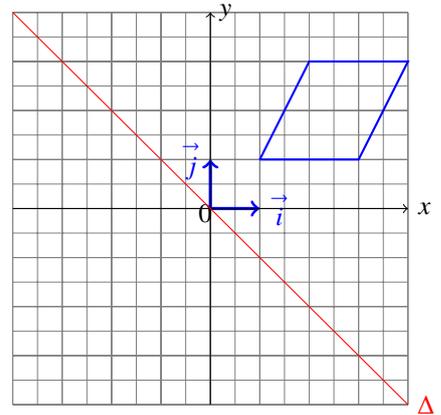
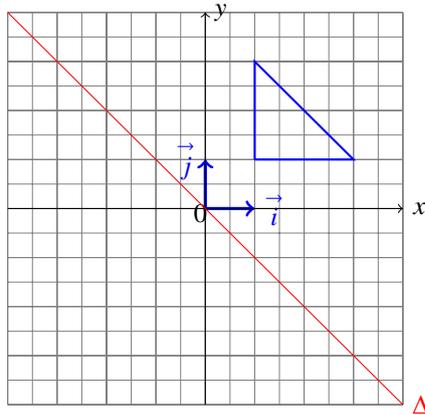
- (a) $x^2 + y^2 - 2x + y = \frac{3}{4}$
 (b) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y + 3 = 0$
 (c) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 36y - 8 = 0$

■ Déterminez, dans chacun des cas suivants, les coordonnées du sommet de la parabole d'équation :

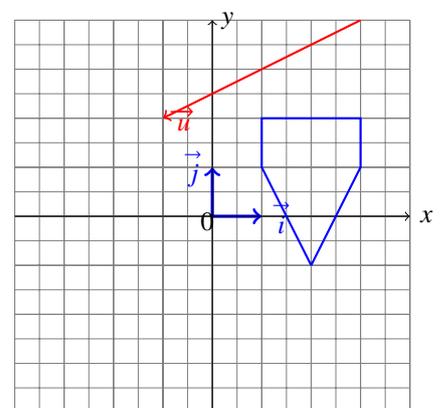
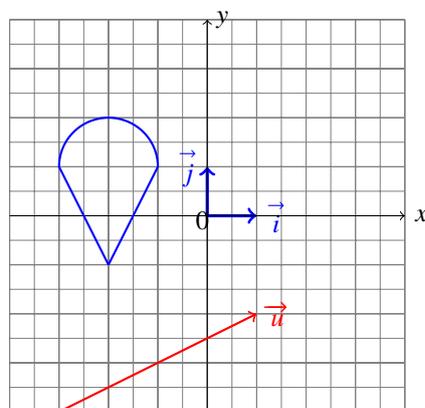
- (a) $y = x^2 - 4x + 7$
 (b) $y = -2x^2 + 8x - 5$
 (c) $y = -x^2 + 4x - 1$

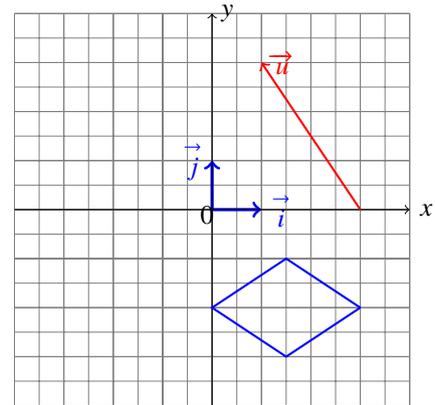
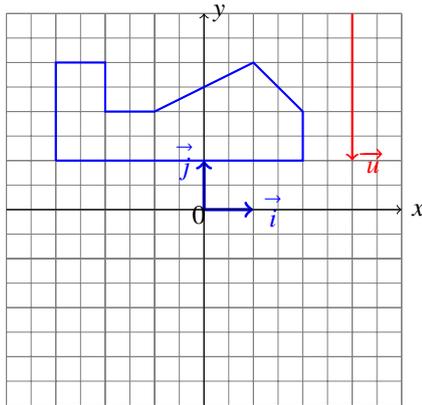
28.2.10 Transformations

■ Représenter l'image de la figure par la réflexion d'axe Δ



■ Représenter l'image de la figure par la translation de vecteur \vec{u}





■ Déterminer les coordonnées de l'image M du point A par la réflexion d'axe Δ dont une équation est indiquée

- (a) $A = (-2, 1)$, $\Delta : y = -x + 1$
 (b) $A = (3, -1)$, $\Delta : y = -2x$
 (c) $A = (-2, 2)$, $\Delta : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
 (d) $A = (\frac{5}{4}, \frac{9}{4})$, $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$
 (e) $A = (-3, 5)$, $\Delta : y = 4x - 1$

■ Déterminer les coordonnées de l'image M du point A par la translation de vecteur \vec{u}

- (a) $A = (-2, 2)$, $\vec{u} = (2, -1)$
 (b) $A = (-1, -3)$, $\vec{u} = (4, 3)$
 (c) $A = (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3})$, $\vec{u} = (1, -\frac{5}{6})$
 (d) $A = (\frac{5}{4}, \frac{8}{3})$, $\vec{u} = (-\frac{2}{3}, 2)$
 (e) $A = (1, \frac{2}{3})$, $\vec{u} = (-\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$

28.3 Nombres complexes.

■ Simplifiez les expressions suivantes dans lesquelles i désigne le nombre vérifiant $i^2 = -1$. On pose $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ et $z_3 = 1 - i$.

- (a) $z_1 + z_2 + z_3$
 (b) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$
 (c) $z_1 z_2 z_3$
 (d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$
 (e) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$
 (f) $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$
 (g) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$
 (h) $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$

■ Calculer le module des nombres complexes suivants

- (a) $(\sqrt{2} + i)(1 + i\sqrt{5})$
 (b) $\frac{2(1 + 3i)}{1 - i}$
 (c) $(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)^2$
 (d) $\frac{1 + i}{1 - i} + \frac{1 - i}{1 + i}$

$$(e) \frac{i(i\sqrt{3} - 1)}{(3 - \sqrt{2}i)^{17}}$$

■ *Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique*

$$(a) -2i$$

$$(b) 1 + i$$

$$(c) \sqrt{2}(1 - i)$$

$$(d) 1 - i\sqrt{3}$$

$$(e) \frac{i - \sqrt{3}}{2}$$

$$(f) \frac{(i + 1)i}{\sqrt{2}}$$

$$(g) \frac{-i + 1}{i - \sqrt{3}}$$

$$(h) \frac{i}{(1 - i\sqrt{3})^3}$$

$$(i) (2 + 2i)^8$$

$$(j) (i\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + i)(1 + i)$$

■ *Simplifier les expressions suivantes*

$$(a) (1 + i)^{214}$$

$$(b) (\sqrt{3} - i)^{204}$$

$$(c) (i - \frac{1}{i})^{178}$$

$$(d) \frac{(-2 + 2i)^{15}}{(i\sqrt{2})^{28}}$$

$$(e) (\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4})^{45}$$

■ *Simplifiez les expressions suivantes dans lesquelles i désigne le nombre vérifiant $i^2 = -1$.*

$$(a) (2 - i)(-3 + 2i)(5 - 4i)$$

$$(b) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$$

$$(c) \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6$$

$$(d) i^{201} + i^{122} + i^{-174} + i^{47}$$

$$(e) i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \dots i^{17} \cdot i^{18} \cdot i^{19}$$

■ *Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes*

$$(a) z^2 + 4 = 0$$

$$(b) z^2 - 2z + 5 = 0$$

$$(c) z^2 + 4z + 5 = 0$$

$$(d) z^3 + 8 = 0$$

$$(e) z^2 + z + 1 = 0$$

$$(f) z^2 = i$$

$$(g) iz^2 = 1 + i$$

$$(h) (z - 1)^2 = -i$$

$$(i) z^2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$(j) (1+i)z^2 = -1 + 7i$$

■ *Décrire géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que*

$$(a) \operatorname{Re}(z) = -1$$

$$(b) \operatorname{Im}(z) = 2$$

$$(c) |z - i| = 1$$

$$(d) |z + 1 - i| = |z - 2i|$$

$$(e) |z| = \operatorname{Re}(z)$$

$$(f) \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$$

$$(g) \operatorname{Re}(iz) = |z|$$

$$(h) z = \bar{z}$$

$$(i) z = -\bar{z}$$

$$(j) 2z - \bar{z} = i$$

28.4 Fonctions et représentations graphiques

■ Déterminez le domaine de définition des expressions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2x-1}$

(d) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^3-8}}$

(f) $f(x) = \frac{1}{|2x-1| - |4x-7|}$

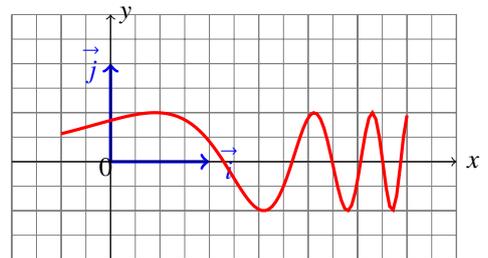
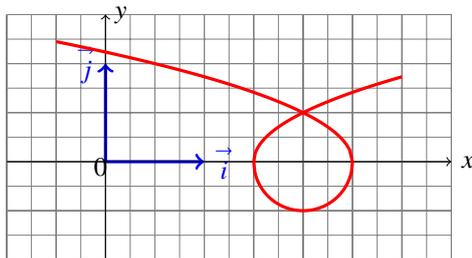
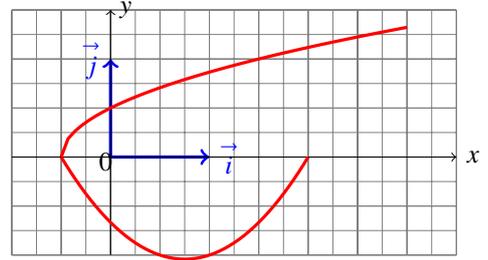
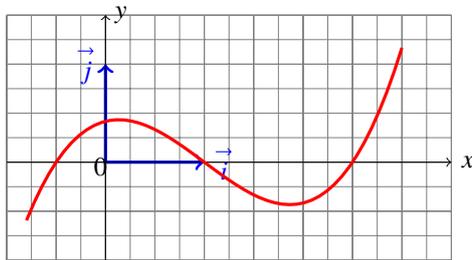
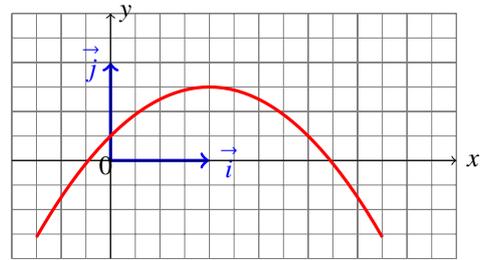
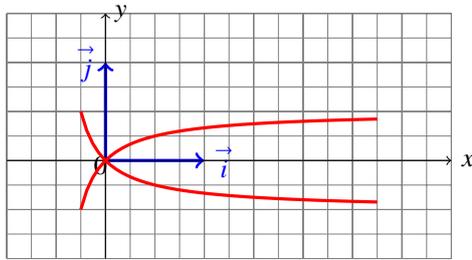
(g) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$

(h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}$

(i) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{x^2-2x-1}}$

(j) $f(x) = \sqrt{2-x}\sqrt{2} + \sqrt{2+x}\sqrt{2}$

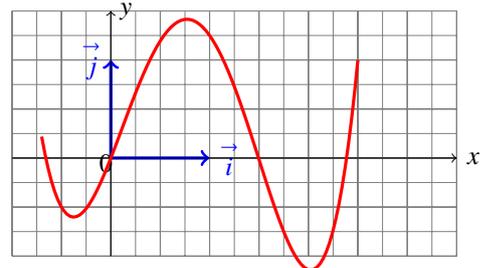
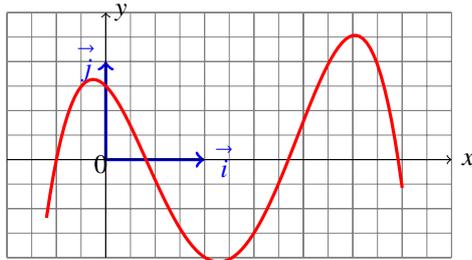
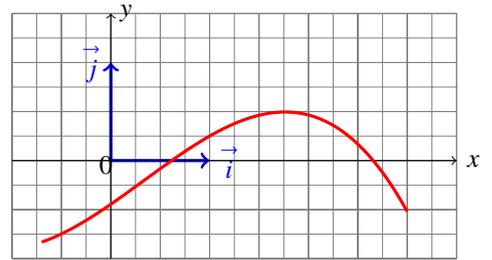
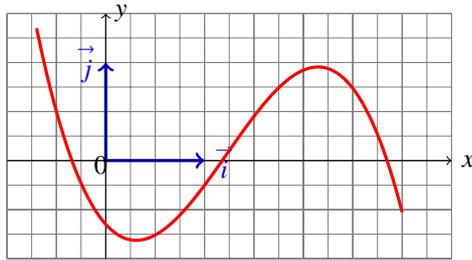
■ Parmi les courbes ci-dessous, lesquelles représentent une fonction et pourquoi ?



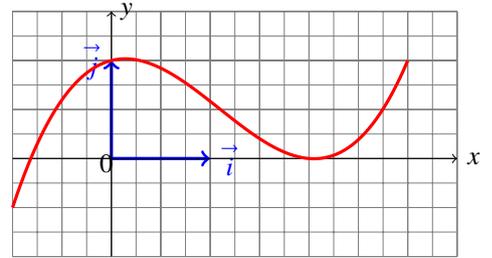
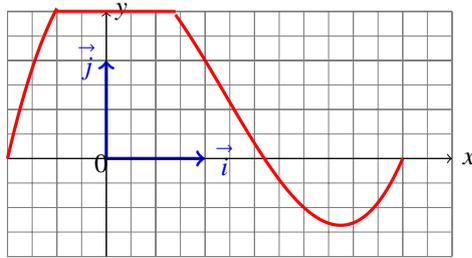
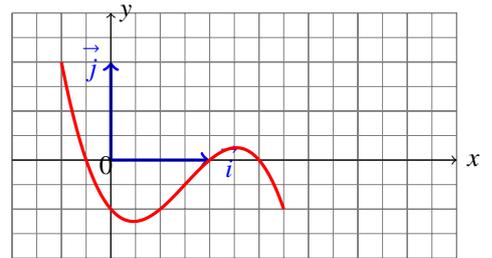
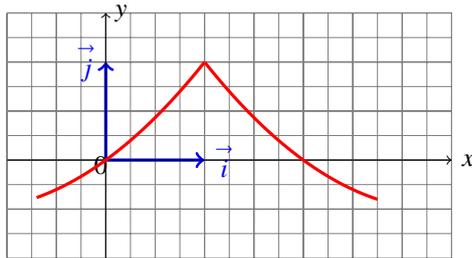
28.4.1 Image vs antécédent

■ Déterminer graphiquement, dans chacun des cas suivants, les images par la fonction

f de $-\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{7}{4}$



■ Déterminer graphiquement, dans chacun des cas suivants, le ou les antécédents par la fonction f de $-\frac{1}{2}$, 0 et 1



■ Déterminez dans chaque cas, le ou les antécédents de b par la fonction f définie par la formule indiquée

(a) $f(x) = 2x + 3, \quad b = -7$

(b) $f(x) = x^2 + 2x, \quad b = -1$

(c) $f(x) = 1 + \frac{2}{2x-1}, \quad b = 4$

(d) $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad b = 3$

(e) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad b = 0.25$

(f) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-1}, \quad b = 5$

(g) $f(x) = |3x-5|, \quad b = 2$

(h) $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}, \quad b = 1$

(i) $f(x) = \frac{x^3+3x}{2x^2-1}, \quad b = 4$

(j) $f(x) = \frac{x^3+x-2}{x^2-x-1}, \quad b = 8$

■ On pose $f(x) = \frac{(x^2-x+1)^3}{(x^2-x)^2}$ pour tout réel $x \notin \{0, 1\}$. Calculer

(a) $f(1-x)$

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $f\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

(d) $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$

(e) $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$

28.4.2 Composition

■ Dans chaque cas, donner une expression de $f(g(x))$

(a) $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = x - 1$

(b) $f(x) = x - 1, \quad g(x) = x^2 + 1$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = (x+1)2$

(d) $f(x) = (x+1)^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = \frac{2x+3}{3x+5}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

(f) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + \frac{1}{x}$

(g) $f(x) = x^3, \quad g(x) = x^4$

(h) $f(x) = x^4, \quad g(x) = 1 - x$

(i) $f(x) = |x|, \quad g(x) = (x+1)^2$

(j) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

■ Représentez graphiquement les fonctions définies par

(a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

(b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(c) $f(x) = -3x + 4$

(d) $f(x) = |x^2 - 4|$

(e) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

(f) $f(x) = -x^3 - 1$

(g) $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$

(h) $f(x) = 2|x-1| - 1$

(i) $f(x) = x - |x|$

(j) $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$

28.5 Limites et dérivation

28.5.1 Limites

■ Déterminez, lorsqu'elles existent, les limites suivantes

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h^2} - 1}{h}$

(b) $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{1-h^4}{1-h^3}$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{1+h} - 1}$

(d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{h}}$

(e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + |h|}{h + 2|h|}$

(f) $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h^2 + 1}{h + 1}$

(g) $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{2h^2 - 3}{5h^2 + 2h - 7}$

(h) $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{h^2 - 5h + 6}{h^2 - 6h + 8}$

(i) $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{4h - 1}{h^3 - h + 2}$

(j) $\lim_{h \rightarrow \sqrt{2}} \frac{h^2 - 2}{h\sqrt{2} - 2}$

(k) $\lim_{h \rightarrow +\infty} \sqrt{1+h^2} - h$

28.5.2 Nombre dérivé

■ Déterminez les limites lorsque h tend vers 0 des expressions suivantes

- (a) $\frac{(2-h)^2 - 4}{\sqrt{h}}$ (f) $\frac{\sqrt{9+2h} - 3}{\sqrt{4-h} - 2}$
 (b) $\frac{1}{1 - \frac{h}{h^2-h}}$ (g) $\frac{1 - (4h-1)^2}{(2+3h)^3 - 8}$
 (c) $\frac{h}{\sqrt{3+2h} - \sqrt{3}}$ (h) $\frac{h^2}{(\sqrt{4+h} - 2)^2}$
 (d) $\frac{\frac{1+h}{3+2h} - \frac{1}{3}}{2h}$
 (e) $\frac{(h+1)\sqrt{h+1} - 1}{h}$

28.5.3 Dérivée de polynômes

■ *Donnez les fonctions dérivées des fonctions définies par les formules suivantes*

- (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$
 (b) $f(x) = (2x - 1)(-3x + 2)$
 (c) $f(x) = (2x + 7)^2(x - 1)^3$
 (d) $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$
 (e) $f(x) = (1 - x)^5(1 - 3x)^4$

■ *Exprimez les expressions polynomiales suivantes sous la forme $a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$*

- (a) $x^3 + 5x^2 + 3x + 1$
 (b) $7x^3 - x^2 + 3x - 4$
 (c) $4x^3 + 12x^2 + 6x$
 (d) $3x^3 + 2x^2$
 (e) $3x^3 + 2x^2 - 11x - 10$

28.5.4 Produits et quotients

■ *Donnez les fonctions dérivées des fonctions définies par les formules suivantes*

- (a) $f(x) = \frac{2x+3}{4x-5}$ (a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
 (b) $f(x) = (5x^2 - 1)\sqrt{2x-3}$ (b) $f(x) = \frac{1}{(1+x^3)^4}$
 (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$
 (d) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x^2 + 2x + 1}$ (d) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 (e) $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ (e) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2} - x}$

28.5.5 Composition

■ *Donnez les fonctions dérivées des fonctions définies par $f(x) = u(v(x))$*

- (a) $u(x) = x^3, \quad v(x) = 1 + x^2$
 (b) $u(x) = \sqrt{x}, \quad v(x) = x + \frac{1}{x}$

(c) $u(x) = \frac{x+2}{x-2}, \quad v(x) = \frac{x-2}{x+2}$

(d) $u(x) = 1+x^2, \quad v(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(e) $u(x) = \frac{1}{2x+1}, \quad v(x) = \sqrt{1+x^2}$

28.5.6 Equations de tangente

■ Déterminer une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ donné

(a) $f(x) = x^4 - x^2 + 3x, \quad x_0 = 1$

(b) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 4$

(c) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}, \quad x_0 = 1$

(d) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}, \quad x_0 = -2$

(e) $f(x) = \frac{3x(x^2-7)}{x+2}, \quad x_0 = 0$

28.6 Calcul intégral**28.6.1 Théorème fondamental du calcul intégral**

■ Calculez les intégrales suivantes

(a) $\int_1^3 x^5 dx$

(b) $\int_{-1}^2 (1+x^2-x^3) dx$

(c) $\int_0^1 x(1+x^2)^3 dx$

(d) $\int_{-\frac{4}{3}}^{\frac{8}{3}} \frac{1}{(x+2)^2} dx$

(e) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+5)^2}{x^4} dx$

(f) $\int_1^4 \frac{x^2+1}{x} dx$

(g) $\int_{-1}^1 \frac{x^2-9}{x+3} dx$

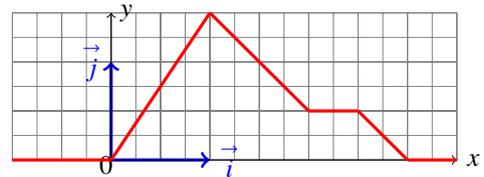
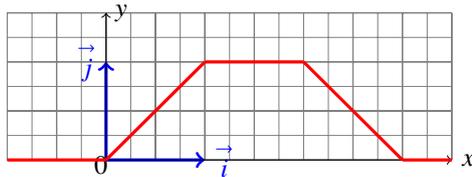
(h) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{3\sqrt{2x}} dx$

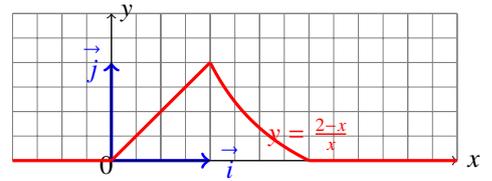
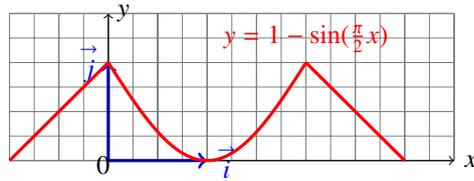
(i) $\int_{-1}^2 \frac{x}{(2x^2+3)^4} dx$

(j) $\int_{-2}^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

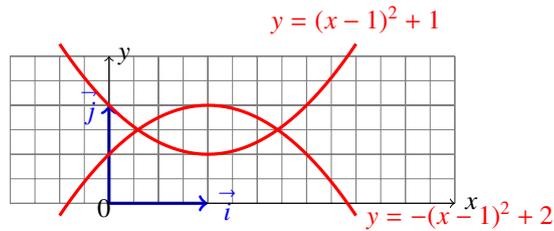
28.6.2 Calcul

■ Calculer l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe dans chacun des cas suivants





■ Calculer l'aire de la lunule délimitée par les deux arcs de paraboles



28.7 Trigonométrie

28.7.1 Représentation graphique

■ Représenter graphiquement les courbes d'équation

- (a) $y = \sin x$
- (b) $y = 1 + \cos x$
- (c) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$
- (d) $y = \tan x$
- (e) $y = \sin^2 x$
- (f) $y = \sin(2x)$
- (g) $y = \sin x + \cos x$
- (h) $y = \frac{1}{\tan x}$
- (i) $y = x - \sin x$
- (j) $y = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$

28.7.2 Calcul trigonométrique

■ Valeurs remarquables

- (a) $\sin \frac{\pi}{3}$
- (b) $\cos \frac{2\pi}{3}$
- (c) $\cos \pi$
- (d) $\sin \frac{5\pi}{6}$
- (e) $\cos \frac{\pi}{4}$
- (f) $\sin \frac{3\pi}{4}$
- (g) $\cos \frac{\pi}{6}$
- (h) $\tan \frac{\pi}{4}$
- (i) $\tan \frac{\pi}{6}$
- (j) $\tan \frac{7\pi}{3}$

■ Simplifiez les expressions suivantes

- (a) $\sin(x + \frac{\pi}{2})$
- (b) $\cos(2x - \frac{3\pi}{2})$
- (c) $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$
- (d) $\cos(\frac{7\pi}{2} - x)$
- (e) $\frac{\sin(x + \frac{5\pi}{2})}{\cos(\frac{7\pi}{2} - x)}$
- (f) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$
- (g) $\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 2x + \sin 4x}$
- (h) $\cos(2x - \frac{3\pi}{4})$
- (i) $\tan(x + \frac{\pi}{4})$
- (j) $\tan(x - \frac{5\pi}{6})$

■ Résoudre les équations suivantes dans $[0, 2\pi]$

- (a) $\sin x = -\frac{1}{2}$
 (b) $2 \sin x \cos x - 3 \sin 2x = 0$
 (c) $\cos x = 0$
 (d) $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} + \cos \frac{x}{2} \sin \frac{\pi}{3}$
 (e) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$
- **Etablir les relations suivantes**
- (a) $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
 (b) $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
 (c) $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$
 (d) $\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
 (e) $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
- (f) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$
 (g) $\sin x + \cos 2x = 0$
 (h) $2 \sin(3x) = \sqrt{2}$
 (i) $\cos x + \sin x + \cos x \sin x = 3$
 (j) $\cos 2x + \sin 2x = -2$
- (f) $1 - \sin x = 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
 (g) $\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$
 (h) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 2x)$
 (i) $4(\cos^6 x + \sin^6 x) = 1 + 3 \cos^2 2x$
 (j) $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$

28.7.3 Dérivation et intégration

■ **Donner les expressions des dérivées des fonctions définies par les formules suivantes**

- (a) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
 (b) $f(x) = (\cos x)^3$
 (c) $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$
 (d) $f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$
 (e) $f(x) = x^2 \tan(\frac{1}{x})$
- (f) $f(x) = \cos(x^2)$
 (g) $f(x) = \sin(\cos x)$
 (h) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$
 (i) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
 (j) $f(x) = \sin(\sqrt{1 - x^2})$

■ **Déterminer les maximum et minimum des fonctions définies par les formules suivantes**

- (a) $f(x) = \sin x - \cos x$
 (b) $f(x) = \cos(2x) + \cos x$
 (c) $f(x) = \sin^2 x - 20 \cos x + 1$
 (d) $f(x) = 10 \cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x$
 (e) $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(x + \frac{\pi}{3}) - \cos x \cos(x + \frac{\pi}{3})$

■ **Calculez les intégrales suivantes en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral**

- (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$
 (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx$
 (c) $\int_{-1}^1 \cos(\pi x) dx$
 (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$
 (e) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x (\cos x)^3 dx$
- (a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$
 (b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(3 + 2 \sin x)^4} dx$
 (c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(5x) dx$
 (d) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \tan^2 x) \tan^2 x dx$
 (e) $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx$

28.8 Exponentielle et logarithme

28.8.1 Fonctions exponentielle et logarithme

■ Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

- | | |
|--|--|
| (a) $e^x = 3$ | (f) $\ln(1+x) = -1$ |
| (b) $e^x + e^{-x} = 4$ | (g) $\ln(x-3) + \ln(x+6) = \ln 2 + \ln 5$ |
| (c) $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2}$ | (h) $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -3$ |
| (d) $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = 2$ | (i) $\ln(1+x+x^2) = 2$ |
| (e) $\ln\left(\frac{1+e^{2x}}{1+e^{-2x}}\right) = \frac{1}{2} \ln(e^x + e^{-x})$ | (j) $\ln(x-4) + \ln(x+3) = \ln(5x+4)$ |

■ Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes

- | | |
|--|---|
| (a) $\ln x > 0$ | (f) $\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) > 0$ |
| (b) $e^{x^2-1} \leq e^x$ | (g) $\frac{\ln x}{1+\ln x} < -3$ |
| (c) $2 \ln x + \ln(x-1) \leq \ln(1+x)$ | (h) $\ln(-x + \sqrt{x^2+1}) > 2$ |
| (d) $(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1 > 0$ | (i) $\ln x + \frac{1}{\ln x} < -2$ |
| (e) $e^{2x} + 3e^x - 4 \leq 0$ | (j) $\ln(x^2 - 2x - 2) \leq 0$ |

■ On pose $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ pour tout réel x . Etablir les relations suivantes

- | | |
|--|---|
| (a) $(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$ | (f) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ |
| (b) $1 - (\operatorname{th} x)^2 = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}$ | (g) $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ |
| (c) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$ | (h) $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2\operatorname{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ |
| (d) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ | (i) $\operatorname{ch}(2x) = 2(\operatorname{ch} x)^2 - 1$ |
| (e) $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$ | (j) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ |

28.8.2 Représentation graphique

■ Représenter graphiquement les courbes d'équation

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| (a) $y = \ln(x+1)$ | (f) $y = e^{-x^2}$ |
| (b) $y = e^{x-1}$ | (g) $y = x - 1 - \ln x$ |
| (c) $y = e^{-x}$ | (h) $y = \frac{x}{1+x} - \ln x$ |
| (d) $y = 1 + \ln x$ | (i) $y = e^x - x - 1$ |
| (e) $y = e^{\frac{x}{2}}$ | (j) $y = e^x + e^{-x}$ |

28.8.3 Dérivation

■ Déterminer la dérivée des fonctions définies par les formules suivantes

(a) $f(x) = xe^x$

(b) $f(x) = x^2e^{-x}$

(c) $f(x) = e^{x^3-2x^2}$

(d) $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$

(e) $f(x) = \sqrt{1+e^x}$

(f) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

(g) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(h) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

(i) $f(x) = e^{e^x}$

(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}$

■ Déterminer la dérivée des fonctions définies par les formules suivantes

(a) $f(x) = x \ln x - x$

(b) $f(x) = x^2 \ln x$

(c) $f(x) = \ln(1+x^2)$

(d) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

(e) $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

(f) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

(g) $f(x) = \ln(1+x+x^2)$

(h) $f(x) = \ln(1+\frac{1}{x^2})$

(i) $f(x) = \sqrt{\ln(1+3x^2)}$

(j) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

28.8.4 Intégration

■ Calculez les intégrales suivantes en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral

(a) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

(b) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx$

(c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan x dx$

(d) $\int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$

(e) $\int_1^2 \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

(f) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

(g) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$

(h) $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x^2} dx$

(i) $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{1-x} dx$

(j) $\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

28.9 Problèmes divers

28.9.1 Décompositions

■ Établir les identités suivantes

(a) Pour tout réel x , $x(x+1) = \frac{x(x+1)(x+2)}{3} - \frac{(x-1)x(x+1)}{3}$

(b) Pour tout réel x , $x(x+1)(x+2) = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{4} - \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{4}$

(c) Pour tout réel $x \notin \{0, -1\}$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

(d) Pour tout réel $x \notin \{0, -1, -2\}$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)$

(e) Pour tout réel $x \notin \{0, -2\}$, $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

■ Utiliser les identités précédentes pour simplifier les sommes suivantes

- (a) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 8 \times 9 + 9 \times 10$
- (b) $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \cdots + 8 \times 9 \times 10$
- (c) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{8 \times 9}$
- (d) $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{7 \times 8 \times 9}$
- (e) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{8 \times 10}$

28.9.2 Limites

■ Déterminez les limites suivantes

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x-1}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x - 1) - \ln x$

■ Déterminez les limites suivantes

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^4}{\sqrt{x}}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{\sin(x^2)}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{3 \sin x}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{e^{-x+2} - 1}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(-x + \sqrt{x^2 + x})$

28.9.3 Continuité

■ Déterminer le domaine de continuité des fonctions définies par les formules suivantes

- (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x - 6}}$
- (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - x^2}$
- (d) $f(x) = \ln(x^3 + 1)$
- (e) $f(x) = \ln(\ln x)$
- (f) $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$
- (g) $f(x) = \ln(\cos x)$
- (h) $f(x) = \ln(x + \sin x)$
- (i) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$
- (j) $f(x) = \sqrt{\sin x - x}$

■ Par quelle valeur doit on définir la fonction f au point x_0 pour que celle-ci soit continue en x_0 ?

(a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x_0 = 0$

(b) $f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0$

(c) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 0$

(e) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \quad x_0 = 2$

(f) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x+3} - 2}, \quad x_0 = 1$

(g) $f(x) = (x+1)^2 \ln|x+1|, \quad x_0 = -1$

(h) $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}, \quad x_0 = 0$

(i) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad x_0 = 0$

(j) $f(x) = \frac{x^2}{\ln(\cos x)}, \quad x_0 = 0$

■ Déterminer a et b pour que les fonctions définies ci-dessous soient continues

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 5x + 7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + ax - b & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} - 2 & \text{si } x < -4 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-3} & \text{si } x < -1 \\ \frac{ax+1}{2x-b} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3x+2}{x+4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

28.9.4 Théorème des valeurs intermédiaires

■ En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, vérifier que l'équation indiquée admet une solution dans l'intervalle I proposé

(a) $x^4 + 2x - 11 = 0, \quad I = [0, 2]$

(b) $\cos x = x, \quad I = [0, \frac{\pi}{2}]$

(c) $\sqrt{1+x^2} = 2x, \quad I = [0, 1]$

(d) $\frac{x}{e^{x^2}} = 1, \quad I = [0, 1]$

(e) $x^{15} = x^{11} + 2, \quad I = \mathbb{R}^+$

■ Déterminez, dans chaque cas, l'intervalle image par la fonction f de l'intervalle I

(a) $f(x) = x^3 - x, \quad I = [-2, 1]$

(b) $f(x) = x \ln x, \quad I =]0, e]$

(c) $f(x) = xe^{-x}, \quad I = [-1, +\infty[$

(d) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad I = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

(e) $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}, \quad I = \mathbb{R}$

28.9.5 Dérivabilité

■ Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions définies par les formules suivantes

(a) $f(x) = |1 - 2x|$

(f) $f(x) = \cos x + |\cos x|$

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

(g) $f(x) = \ln(\tan x)$

(c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(h) $f(x) = \ln(\ln x)$

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$

(i) $f(x) = \sqrt{\frac{1-e^{-x}}{x}}$

(e) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

(j) $f(x) = \ln(x - \sin x)$

■ Étudier, dans chacun des cas ci-dessous, la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par la formule donnée

(a) $f(x) = \begin{cases} e^{x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + (x \ln x)^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

28.9.6 Variations

■ *Etudier les variations des fonctions définies par les formules ci-dessous*

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{(x-3)(x-6)}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(d) $f(x) = \sqrt{3 - x} - x$

(e) $f(x) = (3x - 2)^2 + \sqrt{3x - 2}$

(f) $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x - 1}$

(g) $f(x) = 3(x + 3)^3 + 5x - 2$

(h) $f(x) = |x - 1|$

(i) $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

(j) $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$

■ *Etudier les variations des fonctions définies par les formules ci-dessous*

(a) $f(x) = 2x - 3$

(b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

(c) $f(x) = x^2 \ln x$

(d) $f(x) = \ln x - x + 1$

(e) $f(x) = e^x - x - 1$

(f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(g) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(h) $f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$

(i) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

(j) $f(x) = \frac{\cos x \sin x}{(1 + \cos x)^2}$

■ *Pour chaque relation $y = f(x)$ ci-dessous, exprimer x en fonction de y*

(a) $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

(b) $y = \frac{3}{2} \ln x - \frac{1}{2}$

(c) $y = \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$

(d) $y = \sqrt{\ln x}$

(e) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(f) $y = \frac{2x}{1 - x^2}$

(g) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

(h) $y = \sqrt{x^2 + 1} - x$

(i) $y = e^x - e^{-x}$

(j) $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^x})$

28.9.7 Concavité

Définition 1. Une fonction dérivable f est convexe sur un intervalle I lorsque f' est croissante sur I .

Une fonction dérivable f est concave sur un intervalle I lorsque f' est décroissante sur I .

■ *Pour chaque fonction f ci-dessous, déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et les intervalles sur lesquels f est concave*

- (a) $f(x) = x^3$
 (b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
 (c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
 (d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
 (e) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
 (f) $f(x) = e^{-x}$
 (g) $f(x) = \ln x$
 (h) $f(x) = \sqrt{1+x}$
 (i) $f(x) = x \ln x$
 (j) $f(x) = xe^{-x}$
 (k) $f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$

28.9.8 Représentation graphique

■ *Représenter, dans chaque cas, la région du plan formée des points dont les coordonnées (x, y) vérifient*

- (a) $y > 2x$
 (b) $y < \frac{1}{x}$
 (c) $x \leq |y|$
 (d) $x^2 > -y$
 (e) $2y + 3x > 1$
 (f) $y > \ln x$
 (g) $ye^x < 1$
 (h) $x^2 + y^2 \leq 1$
 (i) $|x| + |y| \leq 1$
 (j) $\ln x \leq y \leq x - 1$

28.9.9 Maximum et minimum

■ *Étudiez les maximum et minimum des fonctions définies par les formules suivantes sur l'intervalle I indiqué à chaque fois*

- (a) $f(x) = \frac{3x+2}{2x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$
 (b) $f(x) = \frac{3+x^2}{x-2}$, $I = [-1, 1]$
 (c) $f(x) = x(1-x)$, $I = [0, 1]$
 (d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$
 (e) $f(x) = \sqrt{x^3+2x-7}$, $I = [0, 1]$
 (f) $f(x) = xe^{-x^2}$, $I = \mathbb{R}$
 (g) $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{2} \sin x)$, $I = \mathbb{R}$
 (h) $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$, $I = [-\pi, \pi]$
 (i) $f(x) = x(\ln x)^2$, $I =]0, 1]$
 (j) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$, $I = \mathbb{R}$

28.9.10 Primitives

■ *Déterminer une primitive pour chacune des fonctions définies ci-dessous*

- (a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$
 (b) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$
 (c) $f(x) = \cos 2x$
 (d) $f(x) = xe^{-x^2}$
 (e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$
 (f) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
 (g) $f(x) = \frac{(1+\tan x)^3}{\cos^2 x}$
 (h) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$
 (i) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
 (j) $f(x) = x \ln(1+x^2) + \frac{2x^3}{1+x^2}$

28.9.11 Inégalités

■ *Établir les inégalités ci-dessous*

- (a) Pour tout entier naturel n et tout réel $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$

- (b) Pour tous réels x et y , $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$
- (c) Pour tous réels positifs x et y , $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$
- (d) Pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$
- (e) Pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$
- (f) Pour tout réel x , $|\sin x| \leq |x|$
- (g) Pour tout réel $x > -1$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$
- (h) Pour tout réel $x > -1$, $1 + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$
- (i) Pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- (j) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x > 0$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.
- (k) Pour tous réels x et y de $]0, 1[$, $y \ln \frac{y}{x} + (1-y) \ln \frac{1-y}{1-x} \geq 2(y-x)^2$
- (l) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $0 \leq \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{2}$
- (m) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x(2 + \cos x) > 3 \sin x$
- (n) Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}$
- (o) Pour tout réel x , $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$

28.10 Probabilités

■ Soient A, B deux événements. On donne $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Calculer

- (a) $P(\bar{A})$
 (b) $P(\bar{A} \cup B)$
 (c) $P(\bar{B} \cup A)$
 (d) $P(A \cap \bar{B})$
 (e) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

■ Soient A, B, C trois événements. Etablir les relations suivantes :

- (a) $P(A \cap B) + P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1$ (f) $P_B(A)P_C(B)P_A(C) = P_A(B)P_B(C)P_C(A)$
 (b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A) + P(\bar{A} \cap B) = 1$ (g) $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P_{A \cup B}(A)}{P_{A \cup B}(B)}$
 (c) $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(A) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = 1$
 (d) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{A})P(\bar{B})$ (h) $\frac{P_A(\bar{B})}{P(B)} + \frac{P(\bar{A})}{P(A)} = \frac{P_B(\bar{A})}{P(A)} + \frac{P(\bar{B})}{P(B)}$
 (e) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(B)P_B(A)$

■ Soient A, B deux événements. On donne $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Calculer

- (a) la probabilité qu'au moins un des événements A ou B se produit,
 (b) la probabilité qu'un seul des événements A ou B se produit

■ On lance trois dés classiques à six faces. On note a, b et c les résultats obtenus et on considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Quelle est

- (a) la probabilité que les solutions soient réelles et distinctes ?
- (b) la probabilité que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ ne rencontre pas l'axe des abscisses ?
- (c) la probabilité que l'axe des abscisses soit tangent à la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$?

■ **Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans chacun des cas suivants**

- (a) $P(X = -1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$
- (b) $P(X = -1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 5) = \frac{1}{4}$
- (c) $P(X = -5) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$
- (d) $P(X = -5) = 10^{-2}$, $P(X = 0) = 0.98$, $P(X = 4) = 10^{-2}$
- (e) $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{2}$
- (f) $P(X = 1) = 1$
- (g) $P(X = 0) = \frac{3}{5}$, $P(X = 2) = \frac{1}{5}$, $P(X = 3) = \frac{1}{5}$
- (h) $P(X = 0) = \frac{4}{7}$, $P(X = 2) = \frac{2}{7}$, $P(X = 3) = \frac{1}{7}$
- (i) $P(X = 10^{-2}) = 10^{-2}$, $P(X = 1.01) = 0.99$

■ **On lance un dé honnête à six faces. Un joueur reçoit 2 euros si le dé montre la face 1, 2 ou 3, 3 euros si le dé montre la face 4 ou 5, et 6 euros si le dé montre la face 6. Soit X le gain du joueur. Calculer**

- (a) l'espérance $E(X)$
- (b) la variance $V(X)$

■ **On lance quatre pièces à Pile ou Face. On note X le nombre de fois que le côté Face est apparu. Calculer :**

- (a) l'espérance $E(X)$
- (b) la variance $V(X)$

■ **On lance deux fois de suite un dé classique à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir**

- (a) un seul six ?
- (b) deux nombres impairs ?
- (c) des faces dont la somme est 8 ?
- (d) des faces qui diffèrent d'une unité ?
- (e) des faces dont le produit est un multiple de 3 ?

■ **La durée en minutes d'une conversation suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{5}$. Calculer**

- (a) la probabilité que la conversation dure plus de cinq minutes,
- (b) la probabilité que la conversation dure entre cinq et six minutes,
- (c) la probabilité que la conversation dure moins de trois minutes,
- (d) la probabilité que la conversation dure moins de six minutes sachant qu'elle dure plus de trois minutes,
- (e) la durée moyenne de la conversation.

28.11 Raisonement par récurrence

■ *Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence*

$$\begin{aligned}1 &= 0 + 1 \\2 + 3 + 4 &= 1 + 8 \\5 + 6 + 7 + 8 + 9 &= 8 + 27 \\10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 &= 27 + 64\end{aligned}$$

■ *Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence*

$$\begin{aligned}1 &= 0 + 1 \\1 + 3 &= 4 \\1 + 3 + 5 &= 9 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16\end{aligned}$$

■ *Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence*

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\1 - 4 &= -(1 + 2) \\1 - 4 + 9 &= 1 + 2 + 3 \\1 - 4 + 9 - 16 &= -(1 + 2 + 3 + 4)\end{aligned}$$

■ *Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} &= \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} &= \frac{23}{24} \\ \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} &= \frac{119}{120}\end{aligned}$$

■ *Observer les égalités ci-dessous puis conjecturer une formule générale à démontrer par récurrence*

$$\begin{aligned}1! &= 1 \\1! + 2 \times 2! &= 5 \\1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! &= 23 \\1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! &= 119\end{aligned}$$

■ *Démontrer par récurrence, les propriétés suivantes :*

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

■ **Démontrer par récurrence, les propriétés suivantes :**

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n} = \frac{n-1}{n}$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \dots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} = \frac{n}{a+nb}$

■ **Démontrer par récurrence, les inégalités suivantes :**

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$

(2) Pour tout entier $n \geq 2$, $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$

(3) Pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$